ÁLGEBRA LINEAL

1.- MATRICES Y DETERMINANTES

1.1.- Generalidades

Se llama *matriz de orden m*x*n* a un conjunto de mxn números (o letras que representan números) dispuestos en m filas y n columnas y encerrado entre paréntesis o corchetes.

$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de orden 2x3

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ es la expresión general de una matriz de orden mxn

El conjunto de todas las matrices de orden mxn suele denotarse por $E_{mxn.}$

La matriz suele denotarse con una letra mayúscula, por ejemplo A. A cada número que va dentro de la matriz se le llama *elemento*; el elemento que está en la fila i y la columna j se denota con la misma letra que la matriz, pero en minúscula, y dos subíndices que indican la posición del elemento: a_{ij} (el primer subíndice corresponde a la fila y el segundo a la columna en la que está el elemento)

En la matriz anterior el elemento a_{12} es 2, el elemento a_{23} es 2.

Una matriz suele definirse también a través de sus elementos, de la siguiente manera: $A=(a_{ij})_{m\times n}$. Lo anterior indicaría que tenemos una matriz de orden mxn, llamada A y a cuyos elementos llamamos a_{ij}.

Los elementos (números) de una matriz pueden ser reales o complejos; en el primer caso se dice que la matriz es real y en el segundo que es compleja.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ es una matriz real $\quad$ $\begin{pmatrix} 2\text{-i} & 0 & 2+i \\ 4 & 2 & 4-i \\ 3 & 1+i & 8 \end{pmatrix}$ es una matriz compleja

Se dice que dos matrices A y B son *equidimensionales* si y sólo si tienen el mismo número de filas y de columnas.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ son equidimensionales

Se dice que dos matrices A y B son *iguales* si y sólo si siendo equidimensionales, además los elementos que ocupan la misma posición son iguales. Es decir:

$a_{ij} = b_{ij}\ \ \forall i = 1, 2,...,m \wedge \forall j = 1, 2, ..., n$. ($m$ y n número de filas y columnas respectivamente)

Una matriz que tiene todos sus elementos nulos se denomina *matriz nula,* y se representa por $(0)_{mxn}$, siendo mxn el orden de la matriz.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de 2x3

Se llama *matriz línea* la matriz que consta de una sola línea. Si está formada por una sola fila se llama *matriz fila* (su orden es $1xn$) y si está formada por una sola columna se llama *matriz columna* (su orden es $mx1$).

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz fila $\qquad$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una matriz columna

Dada una matriz A = $(a_{ij})_{mxn}$ se llama *matriz opuesta de* A a la que se obtiene cambiando el signo de todos los elementos de A; se representa por –A. Así: -A=$(-a_{ij})_{mxn}$.

Si $\quad$ A=$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ -A=$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ es la opuesta de A

1.1.1.- Matrices cuadradas

Se dice que una *matriz* es *cuadrada* si y sólo si tiene el mismo número de filas que de columnas. Así una matriz cuadrada de orden n tiene n filas y n columnas.

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ es una matriz cuadrada de orden n

Existen algunas definiciones importantes aplicables sólo a matrices cuadradas; algunas de ellas se exponen a continuación.

Se llama *diagonal principal* de una matriz cuadrada a la formada por los elementos a_{ii} (es decir: $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$).

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 4 & \boxed{3} & -2 \\ 0 & 2 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$ los elementos encuadrados forman la diagonal principal.

Se llama *traza* de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de su diagonal principal, es decir, $Traza(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.

En el ejemplo anterior la traza de la matriz sería: 1+3+2=6

Una matriz cuadrada se dice *triangular superior* si todos los términos situados por debajo de la diagonal principal son ceros (es decir, $a_{ij}=0\ \forall i>j$). Análogamente, se dice *triangular inferior* si todos los términos situados por encima de la diagonal principal son ceros (es decir, $a_{ij}=0\ \forall i<j$).

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ es una matriz triangular superior de orden 3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ es la forma general de una matriz triangular superior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ es la foma genenal de una matriz triangular inferior

Se llama *matriz diagonal* a toda matriz cuadrada cuyos términos situados fuera de la diagonal principal son todos nulos (es decir, $a_{ij}=0\ \forall i\neq j$). Un caso particular de matriz diagonal es la *matriz escalar* en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ son matrices diagonales

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a \end{pmatrix} \qquad \text{son matrices escalares}$$

Se denomina *matriz unidad* o *matriz identidad* a una matriz escalar en la que los elementos de la diagonal son todos 1. La matriz unidad de orden n suele denotarse por I_n.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matriz unidad de orden 3 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}_n \text{ matriz unidad de orden } n$$

1.2.- <u>Operaciones con matrices</u>

1.2.1.- Suma de matrices

Dadas dos matrices A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}) del mismo orden mxn, se llama *matriz suma* de A y B y se denota por A+B, a la siguiente matriz:

$$A+B = (a_{ij} + b_{ij})$$

es decir, es una matriz cuyos elementos se obtienen sumando uno a uno los elementos que ocupan la misma posición en A y B. La matriz suma es, por lo tanto, una matriz del mismo orden que A y B.

$$\text{Si} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{En general, si} \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

La suma de matrices de orden mxn verifica las siguientes <u>propiedades</u>:

Asociativa: (A + B) + C = A + (B + C), $\quad \forall$A, B, C

Elemento neutro: A + $(0)_{mxn}$ = $(0)_{mxn}$ + A = A, $\forall$A

Elemento opuesto: A + (-A) = (-A) + A = (0), $\forall$A

Conmutativa: A+B = B+A, $\forall$A, B

Nota: obsérvese que las propiedades de la suma de matrices son las mismas que las de las suma de números reales.

1.2.2.- Producto de matrices por un escalar

Sea A = (a_{ij}) una matriz de orden *m*x*n* y α un número (con frecuencia llamado *escalar*). Se define el *producto del escalar* α *por la matriz* A y se denota por αA a una matriz cuyos elementos se obtienen multiplicando cada elemento de A por α. La matriz αA es por lo tanto una matriz de la misma dimensión que A.

$$\text{Si}\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha=2 \quad \Rightarrow \quad \alpha A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 4 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{En general, si } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha A=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \dots & \alpha\cdot a_{1n} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} & \dots & \alpha\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha\cdot a_{m1} & \alpha\cdot a_{m2} & \dots & \alpha\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

El producto de matrices de orden *m*x*n* por un número verifica las siguientes propiedades:

$\alpha\cdot(A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ $\quad\forall\, \alpha \wedge \forall\, A, B$

$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ $\quad\forall\, \alpha, \beta \wedge \forall A$

$(\alpha\cdot\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta\cdot A)$ $\quad\forall\, \alpha, \beta \wedge \forall A$

$1\cdot A = A$ $\quad\forall A$

1.2.3.- Producto de matrices entre sí

Dadas dos matrices A$\in E_{mxp}$ y B$\in E_{pxn}$ (es decir, el número de filas de B coincide con el número de columnas de A), se llama *matriz producto* de A y B a otra matriz, que se denota como A·B, cuyos elementos se obtienen de la siguiente manera:

$$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad i = 1,2,\dots,m \ \wedge \ j = 1,2,\dots,n$$

Es decir, si llamamos C a la matriz producto de A·B, entonces:

$$\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \quad a_{i2} \dots a_{ip} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}_{m\times p} \cdot \begin{pmatrix} \dots\dots b_{1j} \dots\dots \\ \dots\dots b_{2j} \dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots b_{pj} \dots\dots \end{pmatrix}_{p\times n} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots c_{ij} \dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}_{m\times n} \quad \text{donde}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Se observa que la matriz C=A·B es de dimensión *m*x*n.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}_{2x1} \qquad \begin{cases} c_{11} = 2\cdot(-2)+1\cdot 1+(-1)\cdot 2 = -5 \\ c_{21} = 2\cdot(-2)+3\cdot 1+0\cdot 2 = -1 \end{cases}$$

El producto de matrices **no es conmutativo.**

Teniendo en cuenta la definición del producto de matrices se observa que, como se ha dicho anteriormente, es necesario que el número de filas de B coincida con el número de columnas de A. Por ello, si las matrices son rectangulares es posible que exista A·B y no exista B·A , pero aún existiendo B·A no tiene porqué coincidir con A·B.

Si B·A = A·B se dice que las matrices A y B son *permutables o conmutables.*

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ A·B≠ B·A como se comprueba a continuación:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A = \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Según lo anterior cuando se multipliquen matrices ha de tenerse cuidado con el orden de los términos. Para distinguir el orden en el producto A·B se dice que A *premultiplica* a B o multiplica a B por la izquierda; de la misma manera, B *postmultiplica* a A o multiplica a A por la derecha.

Si se quiere multiplicar ambos miembros de una ecuación matricial X = Y por una matriz P, es importante que o bien premultipliquemos ambos miembros por P, o bien postmultipliquemos ambos miembros por P.

El producto de matrices verifica las siguientes propiedades:

Distributiva del producto respecto de la suma por la izquierda

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C \qquad \forall A\in E_{mxn} \wedge \forall B,C\in E_{nxp}$$

Distributiva del producto respecto de la suma por la derecha

$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C \qquad \forall A,B\in E_{mxn} \wedge \forall C\in E_{nxp}$$

Asociativa

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C) \qquad \forall A\in E_{mxn},\ B\in E_{nxp},\ C\in E_{pxq}$$

$$\alpha\cdot(A\cdot B) = (\alpha\cdot A)\cdot B = A\cdot(\alpha\cdot B) \qquad \forall A\in E_{mxn},\ B\in E_{nxp},\ \forall\alpha \text{ (número)}$$

En el producto matricial puede ocurrir que $A\cdot B$ sea nulo siendo $A\neq(0)$ y $B\neq(0)$ (a diferencia del producto con escalares donde $a\cdot b=0$ si y sólo si alguno de los factores es cero).

De la misma manera, siendo $A\neq(0)$ la igualdad matricial $A\cdot B=A\cdot C$ no implica $B=C$ (mientras que con escalares, si $a\cdot b=a\cdot c$ y $a\neq 0 \Rightarrow b=c$).

$$\text{Sean } A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\text{Sean } A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A\cdot B = A\cdot C, \quad \text{siendo } A\neq(0) \text{ y } B\neq C$$

Es fácil comprobar que $\forall A\in E_{mxn}$, $I_m\cdot A=A$ y $A\cdot I_n=A$ (es decir, las matrices I_m y I_n juegan el mismo papel que el número 1 en la multiplicación de números).

1.2.4.- Potencias de matrices cuadradas

Las potencias de matrices cuadradas son un caso particular del producto de matrices. Se llama *potencia p-ésima* ($p\in\mathbb{Z}^+$) de una matriz cuadrada A a la matriz que se obtiene multiplicando A *p* veces por sí misma.

$$A^p = \underbrace{(A\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot A)}_{p \text{ veces}}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ A^2 &= A \cdot A \\ A^3 &= A \cdot A \cdot A \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se observa fácilmente que esta operación no puede realizarse con matrices rectangulares.

Propiedades.

$A^p A^q = A^{p+q}$ $\quad \forall p,q \in \mathbb{Z}^+$

$(A^p)^q = A^{pq}$ $\quad \forall p,q \in \mathbb{Z}^+$

Nota: $A^0 = I$ $\quad \forall$A cuadrada, por convenio

A pesar de que, como hemos dicho, el producto de matrices en general no es conmutativo, es interesante darse cuenta de que cuando multiplicamos dos matrices, donde cada una de ellas es una potencia entera positiva de otra, el orden en que las multipliquemos es indiferente (es decir, las matrices conmutan).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^2A^3 = \begin{pmatrix} 97 & -142 \\ 213 & 26 \end{pmatrix} \qquad A^3.A^2 = \begin{pmatrix} 97 & -142 \\ 213 & 26 \end{pmatrix}$$

Es sencillo demostrar que la afirmación anterior se cumple en general, como se observa a continuación:

$$A^p A^q = A^{p+q} = A^{q+p} = A^q A^p \qquad \forall p,q \in \mathbb{Z}^+$$

Puede también comprobarse fácilmente que si A es una matriz diagonal: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

se cumple que: $A^p = \begin{pmatrix} a_{11}{}^p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}{}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}{}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn}{}^p \end{pmatrix} \quad \forall p \in \mathbb{Z}^+$

Podría pensarse que las potencias de matrices cuadradas funcionan a todos los efectos como las potencias de números. Pero esto no es cierto:

Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden,

$$\mathbf{(A+B)^2} = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2 \neq \mathbf{A^2 + 2AB + B^2}$$

pues en general $AB \neq BA$.

Del mismo modo:

$$\mathbf{(A+B)(A-B)} = A^2 + BA - AB - B^2 \neq \mathbf{A^2 - B^2}$$

1.3.- Matriz traspuesta de una dada

Se llama *matriz traspuesta* de una matriz A a la que se obtiene intercambiando sus filas por sus columnas. Se representa por A^t o A'. Por lo tanto, si $A\in E_{mxn} \Rightarrow A^t\in E_{nxm}$ (si A es de orden *m*x*n* su traspuesta es de orden *n*x*m*)

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^t_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades.

$(A^t)^t = A \qquad \forall A\in E_{mxn}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^t\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$(A+B)^t = A^t+B^t \qquad \forall A,B\in E_{mxn}.$ En general: $(A_1 + A_2 + ... + A_n)^t = A_1^t + A_2^t + ... + A_n^t$

Ejemplo: sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A+B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^t + B^t$$

$(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t \qquad \forall A\in E_{mxq}, \forall B\in E_{qxn}$ En general: $(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n)^t = A_n^t \cdot A_{n-1}^t \cdot ... \cdot A_1^t$

Ejemplo: sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^t = \begin{pmatrix} -8 & -7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -22 & -4 & -23 \\ 14 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -22 & 14 \\ -4 & 8 \\ -23 & 13 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -22 & -4 & -23 \\ 14 & 8 & 13 \end{pmatrix} = B^t \cdot A^t$$

Una matriz cuadrada se dice que es *simétrica* si coincide con su traspuesta, lo cual sólo se puede cumplir si los elementos dispuestos simétricamente a ambos lados de la diagonal son iguales; es decir:

$$\text{A es simétrica} \quad \Leftrightarrow \quad A=A^t \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij}=a_{ji} \quad \forall i,j=1, 2,..., n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{es simétrica}$$

Una matriz cuadrada A se dice que es *antisimétrica* si coincide con la opuesta de su traspuesta, lo cual sólo puede ocurrir si los elementos dispuestos simétricamente a ambos lados de la diagonal son opuestos y los elementos de la diagonal principal son nulos; es decir

$$\text{A es antisimétrica} \quad \Leftrightarrow \quad A=-A^t \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij}=-a_{ji} \quad \forall i,j=1, 2,..., n$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{es antisimétrica}$$

1.4.- Determinantes de matrices cuadradas

1.4.1.- Definición de determinante

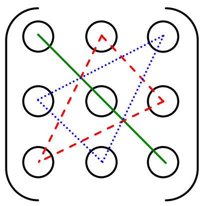
Asociado a cada matriz cuadrada A existe un número que es el valor del *determinante* y se denota por |A|. La expresión matemática de la definición de determinante, cuya observación se deja como opcional para el alumno, puede parecer y es complicada, pero su significado es muy sencillo. Es interesante que el alumno observe esta demostración para darse cuenta del coste que supondría emplearla en matrices de orden elevado y comprender así porqué se buscan modos alternativos de obtener el valor de un determinante y la necesidad de conocer las propiedades de los determinantes para emplear estos métodos.

Precisamente de la aplicación directa de la definición de determinante se obtienen las fórmulas para el cálculo de determinantes de orden 2 y 3, que es seguro que el alumno conoce y aplica habitualmente, si bien estos determinantes pueden obtenerse también por los métodos que se van a explicar posteriormente, válidos para matrices de cualquier orden. Recordamos dichas *fórmulas*:

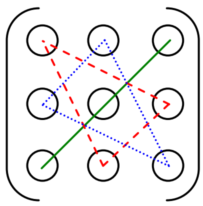
$$\textit{Orden } 2\text{: } |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\textit{Orden } 3\text{: } |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$
$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

Es más sencillo recordar esta última expresión haciendo uso de la *regla de Sarrus*, que "dibuja" esta fórmula mediante un esquema que agrupa los términos que van en cada sumando. En el dibujo de la regla de Sarrus que se muestra a continuación los círculos representan los elementos de la matriz; se han unido con líneas de un mismo color los elementos que van multiplicados en un mismo sumando (a la izquierda los positivos y a la derecha los negativos).



Términos positivos



Términos negativos

1.4.2.- Otras definiciones relacionadas con los determinantes

Para los métodos de cálculo de determinantes que se van a presentar posteriormente es necesario definir algunos conceptos previos.

Si en un determinante D de orden *n* se suprimen *q* filas y *q* columnas, las restantes filas y columnas definen un nuevo determinante de orden (*n*-*q*) que se llama *menor del determinante* D.

Si en $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$ se suprimen las filas 3 y 5 y las columnas 2 y 4

se obtiene el siguiente menor de orden 3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$

A cada elemento a_{ij} de un determinante D se le puede asociar otro determinante que se obtiene suprimiendo en D la fila *i* y la columna *j* en las que se encuentra el elemento;

este nuevo determinante se denomina *menor asociado a* a_{ij} y que se denota por D_{ij}. Si D es de orden *n*, D_{ij} es por lo tanto de orden *n-1*.

Si en el determinante anterior buscamos D_{12}: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$ es el menor asociado al elemento a_{12}.

Cuando un menor de un determinante está formado por las *q* primeras filas y las *q* primeras columnas se denomina *menor principal de orden q*.

Así por ejemplo, en un determinante de orden 5 para obtener sus menores principales de orden 1, 2, 3, 4 y 5 (el propio determinante) vamos seleccionando los elementos (o filas y columnas) como se indica a continuación:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$ resultando así:

$$|a_{11}| \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$ y el propio determinante.

Se llama *adjunto* de un elemento a_{ij} al determinante $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$, es decir, al valor del menor correspondiente a a_{ij} con signo + o - según el lugar que ocupa a_{ij}.

Así, para el determinante de orden 5 de los ejemplos anteriores:

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot D_{12}= -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

1.4.3.- Propiedades de los determinantes

Para calcular los determinantes por los métodos que se van a exponer a continuación convendrá realizar una serie de transformaciones que no alteren su valor, pero que lo conviertan en otro más sencillo de calcular (por ejemplo, por tener muchos elementos nulos o ser triangular).

Para realizar dichas transformaciones deben tenerse en cuenta siempre las propiedades de los determinantes (no vamos a demostrar ninguna de estas propiedades, a pesar de que alguna de las demostraciones es muy sencilla):

1- El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A|=|A|^t$

2- Si una fila (o columna) tiene todos sus elementos nulos, el determinante es cero.

3- Un determinante que tiene dos filas (o dos columnas) iguales es cero.

4- Si en un determinante los elementos de una fila o columna son múltiplos de los de otra, el valor del determinante es cero.

5- Un determinante en el cual una fila (o columna) es combinación lineal de otra es nulo.

6- Si a una fila (o columna) se le suma otra multiplicada por un escalar, el determinante no varía.

7- Si se cambian entre sí dos filas, el valor del determinante cambia de signo (análogamente con las columnas).

8- Multiplicando a todos los elementos de una fila (o columna) por α, el determinante queda multiplicado por α.

9- Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

En general: Si todos los elementos de una fila (o columna) de un determinante son sumas de p números, se puede descomponer dicho determinante en suma de p determinantes que tienen comunes todas las filas (o columnas) excepto la considerada, la cual viene sustituída por el primer sumando en el primer determinante, por el segundo sumando en el segundo determinante,..., por el p-ésimo sumando en el p-ésimo determinante.

10- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. $\quad \forall A,B \in E_{nxn}$.

11- $|A^p|=|A|^p$ $\quad \forall A \in E_{nxn}$.

Nota: en general $\boxed{|A+B| \neq |A| + |B|}$

1.4.4.- Algunos métodos de cálculo de determinantes

Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea (o regla de Laplace)

El valor de un determinante D se puede calcular como la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por los adjuntos de los mismos (como veremos enseguida será conveniente elegir la línea que tenga mayor número de elementos nulos, para reducir el número de operaciones a realizar).

Así, si $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$, desarrollando el determ. por la i-ésima fila se obtiene:

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$$

y haciéndolo por la j-ésima columna se obtiene:

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$$

Ejemplo: calcular $D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $\leftarrow$ 2 elementos nulos

Desarrollando D por los elementos de la tercera fila:

$$D = 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

En el ejemplo anterior, el cálculo del determinante de orden 4 se ha transformado en el cálculo de 4 determinantes de orden 3 (que podemos obtener haciendo uso de la regla de Sarrus, por ejemplo), dos de los cuales no calcularemos por ir multiplicados por cero. En general con este método el cálculo de un determinante de orden *n* se transforma en el cálculo de *n* determinantes de orden *n-1* (o alguno menos si en la fila por la que desarrollamos hay ceros). Por ello este método en sí mismo, sin combinarlo con el uso de las propiedades de los determinantes no es de gran utilidad para el cálculo de determinantes de orden elevado.

Cálculo empleando las propiedades de los determinantes

Todas las propiedades de los determinantes son muy útiles para el cálculo de los mismos. Siempre será conveniente observar si tenemos un determinante con todos sus elementos nulos, o con dos líneas paralelas (filas o columnas) iguales entre sí o proporcionales, o si una fila es combinación lineal de otras (esto último no es tan fácil de ver por simple observación); en estos casos, por las propiedades 2, 3, 4 y 5 sabríamos que el valor del determinante es cero, sin necesidad de calcularlo. De no ser así, se suele intentar transformar el determinante en otro más sencillo (generalmente triangular) haciendo uso con frecuencia de la propiedades 7, 8 y sobre todo la 6.

> Hay que tener mucho cuidado en el empleo de las propiedades 7 y 8, ya que alteran el valor del determinante original, por lo que hay que multiplicar posteriormente el valor obtenido por el número adecuado (-1 o $\frac{1}{\alpha}$, respectivamente) para mantener el valor del determinante inicial.

1.5.- Rango de una matriz de orden *m*x*n*

1.5.1.- Definición

Se llama *rango* de una matriz A de orden *m*x*n* al orden del mayor menor no nulo que puede extraerse de ella. También, teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, se define como el mayor número de filas o columnas que son linealmente independientes en A.

1.5.2.- Cálculo

El primer procedimiento que nos puede venir a la mente para calcular el rango de una matriz es, precisamente emplear su definición. Así, dada una matriz de orden *m*x*n* comenzaremos extrayendo uno a uno sus menores de mayor orden (supongamos que éste es *n*). En cuanto algún menor sea no nulo pararemos el proceso y diremos que el rango de la matriz será *n*. Si extraídos todos los menores de orden *n* no hemos encontrado ninguno no nulo, sabremos que el rango es menor que *n*, pero no sabemos cuánto menor. En este último caso tendríamos que continuar el proceso, extrayendo uno a uno los menores de orden *n-1* hasta que encontremos uno no nulo, momento en el que podríamos decir que el rango de A es *n-1*. Si extraídos todos los menores de orden *n-1* no hemos encontrado ninguno no nulo, sabremos que el rango es menor que *n-1*, pero no sabemos cuánto menor. Así, tendríamos que pasar a plantear los menores de orden *n-2* … Se continúa con el proceso hasta obtener algún menor no nulo de algún orden; el rango de la matriz sería este orden.

Puede verse que este proceso es muy laborioso, por lo que si hay algún procedimiento alternativo es conveniente emplearlo. Uno de estos procedimientos se verá en el apartado 2.4, al explicar cómo se discute la existencia de solución de sistemas de ecuaciones lineales cuando aplicamos el método de Gauss. Este proceso es mucho más eficiente y es comúnmente empleado en la práctica.

1.6.- Matrices regulares: inversa de una matriz cuadrada

1.6.1.- Definición

Una matriz cuadrada A se dice *regular* si existe otra matriz cuadrada, a la que llamaremos *inversa* de A y denotaremos por A^{-1}, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. En caso de no existir esta matriz A^{-1} se dice que A es *singular*.

La inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, ya que $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Podemos decir entonces que A es regular, ya que tiene inversa.

Cuando una matriz cuadrada tiene inversa ésta es única.

Cuando la inversa de una matriz A coincide con su traspuesta, se dice que A es *ortogonal*. Es decir:

$$\text{A es ortogonal} \Leftrightarrow A^{-1}=A^t \Leftrightarrow A^t \cdot A = A \cdot A^t = I$$

1.6.2.- Caracterización de las matrices regulares (cómo saber si una matriz es regular)

Un primer método para saber si una matriz es regular sería utilizar directamente la definición: dada una matriz A planteamos la ecuación matricial $A.A^{-1}=I$. Si este sistema tiene solución la matriz A^{-1} obtenida será la inversa de A y A será regular; si el sistema es incompatible significa que no se puede encontrar A^{-1} y por lo tanto A es singular. Veremos un ejemplo de esto en el siguiente apartado (cálculo de la inversa).

Pero además puede demostrarse que una matriz cuadrada es *regular* si y sólo si su determinante es no nulo. De la misma manera una matriz cuadrada es *singular* si y sólo si su determinante es nulo.

Recordando la definición de rango de una matriz lo anterior es equivalente a decir que una matriz cuadrada de orden *n* es regular si y sólo si el rango de A es *n* y es singular si el rango de A es menor que *n*.

1.6.3.- Algunos métodos para calcular la inversa de una matriz

Utilizando directamente la definición de inversa

Como se ha indicado en el apartado anterior, el método más directo para calcular la inversa de una matriz A sería aplicar directamente su definición. Esta definicion representa un sistema de ecuaciones a partir del cual podremos obtener la inversa de A, en caso de existir ésta.

Por ejemplo, para calcular la inversa de A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ planteamos que buscamos una matriz A^{-1} que, en caso de existir, ha de ser también cuadrada de orden 2, por lo que será de la forma:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

y ha de cumplir $A \cdot A^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esta expresión representa la igualdad de dos matrices y puesto que para que dos matrices sean iguales han de serlo elemento a elemento (según la definición de igualdad de matrices), de aquí se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2t = 0 \\ 2x + z = 0 \\ 2y + t = 1 \end{cases}$$

la discusión de la existencia de solución de este sistema y su resolución se abordarán por cualquier método conocido (por ejemplo los que se explicarán en el apartado siguiente). En este ejemplo el sistema tiene solución y es la siguiente:

$$x = -\frac{1}{3}, \quad y = \frac{2}{3}, \quad z = \frac{2}{3}, \quad t = -\frac{1}{3} \qquad \text{por lo que} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

En caso de que la matriz cuya inversa buscamos no sea regular llegaremos a un sistema incompatible (es decir, sin solución). Por ejemplo:

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$A \cdot A^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x + 8z = 1 \\ 2y + 8t = 0 \\ x + 4z = 0 \\ y + 4t = 1 \end{cases}$ este sistema no tiene solución (según aprenderemos a discutir en el siguiente apartado), lo que significa que no existen valores de x,y,z,t que cumplan todas las ecuaciones simultáneamente y por lo tanto no existe una matriz A^{-1}/ $A.A^{-1}=I$ (es decir, A no tiene inversa).

Cálculo de A^{-1} empleando la fórmula: $\boxed{\mathbf{A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot A^a}}$

Se puede demostrar que si A es regular su inversa se puede calcular según la expresión anterior, donde A^a denota a la matriz adjunta de A y es aquella matriz que resulta de sustituir cada elemento de A^t por su adjunto.

Para calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ necesitamos su determinante:

$$|A| = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists A^{-1}$$

y su adjunta:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^a = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/8 & -1/4 & 1/4 \\ 3/8 & 1/4 & -1/4 \\ -3/8 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

1.6.4.- Algunas propiedades

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ $\quad\forall$A regular$\in E_{nxn}(\frown)$.

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\quad\forall$A,B regulares$\in E_{nxn}(\frown)$

2.- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: DISCUSIÓN DE LA EXISTENCIA DE SOLUCIÓN Y RESOLUCIÓN

2.1.- <u>Algunas definiciones.</u>

Recordamos que se llama *ecuación lineal* o *ecuación de primer grado* a una expresión algebraica de la forma:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + \ldots + a_n \cdot x_n = b$$

donde a_1, a_2,..., a_n son números conocidos que se llaman *coeficientes* y b es un número también conocido que se llama *término independiente*. Por último, x_1, x_2,...,x_n son variables cuyo valor pretendemos determinar y que se suelen llamar *incógnitas*.

$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 5$ es una ecuación lineal con 3 incógnitas

Cuando el término independiente de la ecuación es 0 se dice que la ecuación es *homogénea*.

$-x_1 + 2 \cdot x_2 = 0$ es una ecuación homogénea con dos incógnitas

Se llama *solución de la ecuación* $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + \ldots + a_n \cdot x_n = b$ a un conjunto de números r_1, r_2,..., r_n tales que sustituídos en la ecuación, la verifican; es decir:

$$a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 + a_3 \cdot r_3 + \ldots + a_n \cdot r_n = b$$

Se dice que dos ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen la misma solución.

$\begin{matrix} 2x = 4 \\ 4x = 8 \end{matrix}$ son ecuaciones equivalentes. La solución de ambas es x=2

Se llama *sistema lineal* de m ecuaciones con n incógnitas a todo conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\left\{ \begin{matrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + \ldots + a_{3n} \cdot x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{matrix} \right. \qquad (1)$$

$\begin{cases} 4 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 = -2 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 7 \end{cases}$ es un sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas

Se dice que un sistema de ecuaciones es *homogéneo* cuando todas sus ecuaciones son homogéneas. En caso contrario se llama *heterogéneo*.

Se llama *solución de un sistema* de m ecuaciones con n incógnitas a un conjunto de n números r_1, r_2,..., r_n que verifican **todas** las ecuaciones del sistema. Es decir:

$$\left\{ \begin{matrix} a_{11} \cdot r_1 + a_{12} \cdot r_2 + a_{13} \cdot r_3 + \ldots + a_{1n} \cdot r_n = b_1 \\ a_{21} \cdot r_1 + a_{22} \cdot r_2 + a_{23} \cdot r_3 + \ldots + a_{2n} \cdot r_n = b_2 \\ a_{31} \cdot r_1 + a_{32} \cdot r_2 + a_{33} \cdot r_3 + \ldots + a_{3n} \cdot r_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot r_1 + a_{m2} \cdot r_2 + a_{m3} \cdot r_3 + \ldots + a_{mn} \cdot r_n = b_m \end{matrix} \right.$$

Se dice que un sistema de ecuaciones es *compatible* cuando posee una o varias soluciones. Si posee una única solución se llama *compatible determinado* y si posee infinitas se llama *compatible indeterminado*.

Se dice que un sistema de ecuaciones es *incompatible* cuando no tiene ninguna solución.

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo siempre es compatible, ya que al menos tiene siempre la solución trivial (es decir, aquella en la que todas las incógnitas valen cero).

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones.

Nota: es muy conveniente observar que dependiendo de la "forma de un sistema" y no sólo de su tamaño, un sistema puede ser más sencillo de resolver que otro. Así por ejemplo, entre los dos sistemas siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_3 = -2 \end{array}\right\} \qquad \text{y} \qquad \left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{array}\right\}$$

a simple vista parece más sencillo resolver el de la izquierda que el de la derecha, a pesar de que ambos tienen el mismo número de ecuaciones e incógnitas. Esto es debido a la forma en "*escalera*" o *escalonada* del primer sistema. En general los sistemas de ecuaciones de la forma:

$$\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

son muy sencillos de resolver mediante el procedimiento de *sustitución regresiva*, que simplemente consiste en resolver empezando por la última ecuación; en ella se despeja el valor de x_n que se sustituirá en la anteúltima ecuación, en la que ya por lo tanto sólo quedará una incógnita x_{n-1}. A continuación los valores de x_{n-1} y x_n se sustituyen en la anterior ecuación, quedando en ésta sólo la incógnita x_{n-2} y así sucesivamente … hasta llegar a la primera ecuación, donde sólo quedará como incógnita x_1, que se despejará.

2.2.- Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Es muy sencillo darse cuenta de que un sistema de ecuaciones lineales como (1) se puede escribir en forma matricial de la manera que se indica a continuación (sólo hay que recordar cómo se realiza el producto de matrices y qué significa que dos matrices son iguales):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Esto se conoce como *expresión matricial del sistema* (1). En forma compacta se escribiría:

$$\boxed{\mathrm{A} \cdot x = \mathrm{b}}$$

donde $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se denomina *matriz de los coeficientes del sistema*

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{\mathrm{m}} \end{pmatrix}$ es la matriz incógnita (o matriz de incógnitas)

y $\mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ es la matriz de los términos independientes.

Para resolver y discutir un sistema por los métodos que veremos posteriormente es útil también definir la siguiente matriz:

$(\mathrm{A} \mid \mathrm{b}) = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ que se denomina *matriz ampliada del sistema*.

Nota: como puede verse fácilmente, la matriz ampliada de un sistema escalonado tendrá también forma en escalera. Se observa que en este tipo de matrices:

- el primer elemento no nulo (por la izquierda) de cada fila está a la derecha del primer elemento no nulo de filas anteriores (forma escalonada)

- las filas nulas, si existen, están en la parte inferior de la matriz.

Las siguientes matrices están en forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $*$ representa un número cualquiera.

Si trabajamos matricialmente diremos que $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}$ es *solución del sistema* (2) (o equivalentemente del (1)) si:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{o, en forma compacta, si} \quad \mathrm{A} \cdot \mathrm{r} = \mathrm{b}$$

2.3.- Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Existen varios métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales: eliminación, sustitución, Cramer, Gauss, etc. Vamos a centrarnos en este apartado en los dos últimos si bien dedicaremos mayor atención al método de Gauss, que es el más útil en la práctica; cualquiera de los demás métodos es muy costoso y/o complicado de utilizar para más de tres ecuaciones.

2.3.1.- Método de Cramer

El método de Cramer es únicamente válido para resolver sistemas de ecuaciones lineales cuadrados (mismo número de ecuaciones que de incógnitas) y con matriz de los coeficientes regular (lo que implica, como veremos posteriormente, que tiene solución única). Vemos pues que es de uso limitado y además bastante costoso de emplear en la práctica, ya que involucra el cálculo de un número elevado de determinantes (más elevado cuanto mayor sea el sistema) y por lo tanto cuantiosas multiplicaciones (por ejemplo, cuando el número de incógnitas es 5 es necesario hacer 1440 operaciones para resolver el problema).

Dado un sistema de ecuaciones lineales de n ecuaciones con n incógnitas, es decir, de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + \ldots + a_{3n}\cdot x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + a_{n3}\cdot x_3 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$$

cuyas matrices de los coeficientes y de términos independientes son:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{b}_2 \\ \ldots \\ \mathrm{b}_\mathrm{m} \end{pmatrix}$$

puede demostrarse que el valor de cada incógnita x_i puede calcularse como el cociente de dos determinantes: en el denominador el determinante de la matriz de los coeficientes y en el numerador el determinante que resulta de sustituir en el determinante de la matriz de los coeficientes la columna *i*-ésima por la columna de términos independientes. Es decir:

$$x_i = \frac{\begin{array}{cccccc} & & & \text{col } i & & \\ & & & \downarrow & & \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|}$$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$|\mathrm{A}| = -2; \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ \boxed{-1} & 2 & -1 \\ \boxed{3} & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|} = 4; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \boxed{1} & 2 \\ -1 & \boxed{-1} & -1 \\ 1 & \boxed{3} & -1 \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|} = 1; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & \boxed{1} \\ -1 & 2 & \boxed{-1} \\ 1 & -2 & \boxed{3} \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|} = -1$$

2.3.2.- Método de Gauss

Método de Gauss aplicado directamente sobre las ecuaciones del sistema

Puede demostrarse que cuando sobre un sistema de ecuaciones se realiza una trasformación de uno de los tres tipos que se van a indicar a continuación el sistema resultante es equivalente al inicial (es decir, tiene las mismas soluciones).

Tranformaciones:

1- se intercambian entre sí de lugar dos ecuaciones $(E_i \sim E_j)$

2- se cambia una ecuación por ella misma multiplicada por un número no nulo $(E_i \sim \alpha \cdot E_i \quad \text{siendo } \alpha \neq 0)$

3- se cambia una ecuación por ella más una combinación lineal de otras $(E_i \sim E_i + \alpha \cdot E_j + \beta \cdot E_p + \cdots + \gamma E_q)$

El método de Gauss consiste en realizar transformaciones de los 3 tipos anteriores sobre el sistema que se quiere resolver hasta llegar a un sistema equivalente que esté en forma escalonada sobre la que será muy sencillo tanto discutir la existencia de solución del sistema como su resolución por sustitución regresiva en caso de existir solución.

Ejemplo. Queremos resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Si sobre él se realiza la transformación consistente en sumar a la segunda ecuación la primera $(E_2 \sim E_2 + E_1)$, se obtiene el sistema equivalente:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Si ahora a la tercera ecuación se le resta la primera $(E_3 \sim E_3 - E_1)$ se obtiene el sistema equivalente:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_2 - 3x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Si ahora a la tercera fila se le suma la segunda $(E_3 \sim E_3 + E_2)$ se obtiene un nuevo sistema:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_3 &= -2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Este sistema es triangular y se puede resolver de forma simple. En la última ecuación podemos despejar x_3=-1. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación se obtiene x_2=1. Finalmente sustituyendo los valores de x_2 y x_3 en la primera ecuación se obtiene que $x_1 = 4$.

Nota: podríamos haber hecho una transformación más sobre la última ecuación, para conseguir que el coeficiente de x_3 sea 1 y así tener ya despejado el valor de x_3. Aunque esto suele hacerse, la verdadera ventaja ya la tenemos en el sistema (3), debido a su forma en escalera.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Método de Gauss aplicado sobre la matriz ampliada del sistema de ecuaciones

En el ejemplo anterior puede observarse claramente que las operaciones que se realizan para obtener sistemas equivalentes son operaciones sobre los coeficientes del sistema y los términos independientes. Podemos por lo tanto trabajar sin arrastrar a lo largo de todo el proceso el nombre de las incógnitas, que no se ve afectado en las sucesivas operaciones. Así, se suele operar, no sobre el sistema directamente, sino sobre la matriz de coeficientes y la de términos independientes; en realidad se trabaja sobre la matriz ampliada, que almacena dentro coeficientes y términos independientes.

Las transformaciones de los tipos 1 a 3 indicadas anteriormente, cuando se realizan sobre las filas de una matriz reciben el nombre de *transformaciones elementales*. Así pues el método de Gauss consiste en, dada la matriz ampliada de un sistema realizar sobre ella transformaciones elementales hasta llegar a su forma escalonada, sobre la que se podrá discutir fácilmente la existencia de solución del sistema y en caso de existir ésta, hallarla.

Así, en el ejemplo anterior se tendría:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{b}} \qquad \text{forma matricial del sistema}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)}_{(A|b)} \qquad \text{matriz ampliada}$$

Sumando a la segunda fila la primera $(F_2 \sim F_2 - F_1)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Restando a la tercera fila la primera $(F_3 \sim F_3 - F_1)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Sumando a la tercera fila la segunda $(F_3 \sim F_3 + F_2)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Podemos hacer una última operación, multiplicando por $-\frac{1}{2}$ la tercera fila $(F_3 \sim -\frac{1}{2}F_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Las dos últimas matrices son las matrices ampliadas de los sistemas (3) y (4), respectivamente, que escribiríamos ahora:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = -1 \end{array}\right\}$$

y procederíamos a resolver por sustitución regresiva.

Veamos otro ejemplo. Sea el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \qquad + 10x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1 \end{array}\right\}$$

Trabajando a partir de la matriz ampliada del sistema obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \sim F_3 - 4F_1]{F_2 \sim F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 1 & -34 & -19 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \sim F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

que nos permite escribir un sistema de ecuaciones equivalente al original pero más sencillo de discutir y, en su caso, resolver :

$$\left.\begin{array}{rrrl} x_1 & & +10x_3 & = 5 \\ & x_2 & -34x_3 & = -16 \\ & & 0x_3 & = -3 \end{array}\right\}$$

Se aprecia de forma inmediata que la tercera ecuación convierte al sistema en incompatible al no ser posible encontrar ningún valor de x_1, x_2 y x_3 tales que se verifique que $0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = -3$

2.4.- <u>Discusión de la existencia de solución: Teorema de Rouché-Frobenius</u>

Teorema de Rouché-Frobenius:

Dado un sistema de ecuaciones lineales de *m* ecuaciones con *n* incógnitas: $A \cdot x = b$	
- si *rango*(A)≠ *rango*(A|b)	entonces el sistema es incompatible
- si *rango*(A)= *rango*(A|b)=*n*	entonces el sistema es compatible determinado
- si *rango*(A)= *rango*(A|b)<*n*	entonces el sistema es compatible indeterminado

Para aplicar este teorema es necesario calcular el rango de dos matrices. Esto puede hacerse como se ha explicado en el apartado 1.5.2, es decir, tomamos las matrices y vamos extrayendo los menores, empezando por el orden mayor, hasta encontrar uno no nulo. Pero como ya se indicó también allí este proceso es muy laborioso por lo que no suele utilizarse y, sobre todo, no tiene ningún sentido utilizarlo cuando vamos a resolver el sistema por el método de Gauss. En su lugar es conveniente hacer uso de lo siguiente: puede demostrarse que las transformaciones elementales realizadas sobre una matriz (es decir, las que hacemos para resolver por el método de Gauss) no alteran la dimensión (esto se ve claramente) ni el rango de la matriz original (esto no es tan evidente). Esto significa que las sucesivas matrices que vamos obteniendo en el proceso de Gauss tienen el mismo rango que la original; en concreto, la forma escalonada que obtenemos al final del proceso tiene el mismo rango que la matriz original, pero tiene la ventaja de que en ella el rango se ve “a ojo” (o si se pretende calcular buscando menores el proceso es muy sencillo).

Cuando una matriz está en forma escalonada el rango coincide con el número de escalones (o filas en las que hay algún elemento no nulo). Así si en la matriz escalonada de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas llamamos p al número de escalones de la parte correspondiente a la matriz de los coeficientes (para verlos no tenemos más que "tapar" la parte correspondiente a b, término independiente) y llamamos q al número de escalones de la matriz ampliada, podemos reenunciar el teorema de Rouché de la siguiente manera:

- si $p \neq q$ el sistema es incompatible

- si $p = q = n$ el sistema es compatible determinado

- si $p = q < n$ el sistema es compatible indeterminado

3.- EJERCICIOS PROPUESTOS

PROBLEMAS BÁSICOS DE MATRICES

1- Indica de qué tipo son las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -9 & 0 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

2- Escribe: a) la matriz unidad de orden 3 b) la matriz nula de 2x3

3- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3-2i & 7 \\ 5 & -4 & 5-3i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2+i & 3 \end{pmatrix}$, dí si son ciertas las siguientes afirmaciones:

a) A y B son equidimensionales b) A y B son matrices reales

4- Indica cuánto tienen que valer x e y para que A y B sean iguales, siendo:

a) $A = \begin{pmatrix} x & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 3 & y & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} x & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ x & y & 2 \end{pmatrix}$

5- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, para cada una de ellas calcula (si es posible) su opuesta, su traspuesta y la traza de la matriz.

6- Escribe una matriz simétrica y una antisimétrica de orden 3

7- Dadas las matrices:

$A=\begin{pmatrix}2 & x\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-y & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$, calcular si es posible:

a) A+B b) A+C c) A·B d)B·A e) A·C f) C·A g)2A h) -2C i) A^2 j) C^3

8- Comprueba que A+B=B+A (propiedad conmutativa de la suma de matrices):

a) siendo A y B: $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) siendo A y B dos matrices cualesquiera (es decir, genéricas de orden *m*x*n*):

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

9- Comprueba que la *Traza*(A+B)=*Traza*(B+A)

a) siendo A y B: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

b) siendo A y B dos matrices cuadradas cualesquiera (es decir, genéricas de orden *n*)

10- ¿Para qué valores de *k* A y B son permutables?

a) Siendo $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & k\end{pmatrix}$.

b) Siendo $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & k\end{pmatrix}$.

11- Sean $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -8\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$. Comprobar que $A\cdot B=A\cdot C$ siendo $B\neq C$.

12- Sea $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Encontrar el conjunto de las matrices $B_{2\times 2}$ tales que $A\cdot B=(0)$.

13- Comprobar si son permutables las matrices A y B:

a) siendo A y B: $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) siendo A y B dos matrices diagonales cualesquiera de orden *n*.

14- Dada A, calcular A^2, A^3, A^4:

a) siendo A : $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) siendo A una matriz diagonal cualquiera de orden *n*. ¿Cómo crees que quedaría en este caso A^n?

15- Dadas $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$:

a) calcular A·B, $(A\cdot B)^t$, $A^t\cdot B^t$ y $B^t\cdot A^t$

b) con los resultados anteriores comprobar que se cumplen las propiedades de las matrices traspuestas.

16- Dada $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Comprueba que $A+A^t$ es simétrica.

b) Comprueba que $A-A^t$ es antisimétrica.

c) Comprueba las dos propiedades anteriores para una matriz cuadrada cualquiera (es decir, genérica) de orden *n*.

DETERMINANTES

17- Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & -3 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Obtener de ella (sin calcular sus valores): a) un menor de orden 4, b) dos menores de orden 3, c) 2 menores de orden 2, d) 2 menores de orden 1, e) los menores principales de todos los órdenes posibles, f) el menor asociado al elemento a_{11} y el adjunto del elemento a_{11}, g) el menor asociado al elemento a_{23} y el adjunto del elemento a_{23}, h) el menor asociado al elemento a_{44} y el adjunto del elemento a_{44}

18- Calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

19- Calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

20- Calcular el valor del siguiente determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

a) desarrollando por los elementos de la 1ª fila

b) desarrollando por los elementos de la 2ª fila

c) desarrollando por los elementos de la 3ª fila

d) desarrollando por los elementos de la 4ª columna

e) desarrollando por los elementos de la 1ª columna

21- Calcular los siguientes determinantes (tranformándolos previamente en otros más sencillos: triangulares)

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & -9 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ c) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

e) $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & -6 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

22- Para la matriz A del apartado anterior calcular: a) $|A^5|$, b) $|2A|$, c) $|A^{-1}|$, d) el determinante de una matriz obtenida cambiando la segunda fila de A por: (2 8 -8).

23- Para las matrices B y C del ejercicio 21, calcular $|B \cdot C|$

CÁLCULO DEL RANGO E INVERSAS

24- Calcular el rango de las siguientes matrices e indicar si son regulares o singulares.

$$\text{a) } A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\quad \text{b) } B=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\quad \text{c) } C=\begin{pmatrix}1&-7&5\\1&-4&-1\\-2&8&-3\end{pmatrix}\quad \text{d) } D=\begin{pmatrix}0&2&5\\-2&0&7\\1&3&4\end{pmatrix}$$

$$\text{e) } E=\begin{pmatrix}5&0&3\\7&0&2\\9&0&1\end{pmatrix}\quad \text{f) } F=\begin{pmatrix}1&4&2\\2&7&3\\1&7&5\end{pmatrix}\quad \text{g) } G=\begin{pmatrix}1&3&0&-1\\0&1&-2&-1\\-2&-6&3&2\\3&5&8&-3\end{pmatrix}\quad \text{h) } H=\begin{pmatrix}1&3&-5\\0&2&-3\\0&-4&7\\-1&5&-8\end{pmatrix}$$

25- Calcular el valor de *a* para que A sea regular:

$$\text{a) } A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&2&a\end{pmatrix}\quad \text{b) } A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\a&2&3\end{pmatrix}$$

26- Calcular la inversa de las siguientes matrices:

$$\text{a) } A=\begin{pmatrix}3&-8\\-1&3\end{pmatrix}\quad \text{b) } B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\quad \text{c) } (A.B)^{-1}\quad \text{d) } D=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&3&3\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\text{e) } E=\begin{pmatrix}1&3&0&-1\\0&1&-2&-1\\-2&-6&3&2\\3&5&8&-3\end{pmatrix}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

27- Dados los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) }\begin{cases}x-5y-4z=0\\-x+6y+6z=-3\\-2x+6y+3z=7\end{cases}\quad \text{b) }\begin{cases}y-4z+t=0\\x-6y=5\\-x+6y+z+5t=3\\-y+5z+4t=0\end{cases}\quad \text{c) }\begin{cases}x+y+z+t=2\\x+2y+z+2t=3\\x+2y+z+3t=2\end{cases}$$

i) decir si tienen forma escalonada, ii) escribirlos en forma matricial e identificar las matrices de los coeficientes, de los términos independientes, de incógnitas y la matriz ampliada del sistema, iii) clasificarlos y resolverlos(todo ello por el método de Gauss)

28- Calcular el valor de *a* para que los siguientes sistemas sean equivalentes:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x=2 \\ x+2y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ 2x+3y+z=5 \\ 3x+2y=a \end{cases}$$

29- Discutir el carácter de los siguientes sistemas en función del parámetro α, y resolverlos cuando sea posible, todo ello mediante el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x-y+3z=2 \\ 4x-2y+\alpha\cdot z=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+\alpha\cdot z=3 \\ x+2y+3z=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-2y=-1 \\ -2x+12y-10z=3 \\ 10y-10z=\alpha \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=\alpha \\ 2x=2 \\ x+2y+2z=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+3z-t=2 \\ y+5z=7 \\ 2x-y+z-2t=\alpha \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+2z=-5 \\ x+2y+z=1 \\ -2x-10y+\alpha\cdot z=-3\cdot\alpha^2-14 \\ 6x+9y+(\alpha+7)\cdot z=-3\alpha \end{cases}$

30- Considérese un sistema cuya matriz ampliada es de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha & 0 \end{array}\right)$$

a) ¿Es posible que el sistema sea incompatible? Explicar por qué.

b) ¿Para qué valores de α este sistema tendrá infinitas soluciones?

31- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales indicar para que valores de a tiene solución y en esos casos resolverlo mediante el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -8 & -6 & 5+a & -a \\ 3 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.- SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

PROBLEMAS BÁSICOS DE MATRICES

1- a) fila b) columna c) rectangular d) cuadrada e) diagonal f) escalar

g) triangular superior h) triangular inferior

2- a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3- a) falso b) falso

4- a) x=2; y=0 b) es imposible que sean iguales

5- a) $-A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -7 \\ -5 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $A^t=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. El concepto de traza sólo se define para matrices cuadradas.

b) $-B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B^t=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, *Traza* (B)=5

6- Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ es simétrica. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica

7- a) $\begin{pmatrix} 2-y & x+2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ b) No es posible c) $\begin{pmatrix} -2y+3x & 4+x \\ -3y+12 & 10 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 6-2y & 8-xy \\ 9 & 4+3x \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4+4x & 4+x & 6+2x \\ 22 & 10 & 17 \end{pmatrix}$ f) No es posible g) $\begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} -4 & -4 & -6 \\ -8 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 4+3x & 6x \\ 18 & 16+3x \end{pmatrix}$ j) No es posible

10- a) k=6

b) no hay valores de k que hagan que estas matrices conmuten.

12- $B=\begin{pmatrix} t+2z & 2z \\ z & t \end{pmatrix} \quad \forall z,t$

13- a) Sí lo son.

b) Sí lo son. Obtenemos la conclusión de que las matrices diagonales (de cualquier orden) conmutan.

14- a) $A^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix} a_{11}^{\ 2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{\ 2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{\ 2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn}^{\ 2} \end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix} a_{11}^{\ 3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{\ 3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{\ 3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn}^{\ 3} \end{pmatrix}, \quad A^4=\begin{pmatrix} a_{11}^{\ 4} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{\ 4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{\ 4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn}^{\ 4} \end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix} a_{11}^{\ n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{\ n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{\ n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn}^{\ n} \end{pmatrix}$$

15- a) $A.B=\begin{pmatrix} -22 & 14 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$, $(A.B)^t=\begin{pmatrix} -22 & -4 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$, $A^t.B^t=\begin{pmatrix} -20 & -22 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B^t.A^t=\begin{pmatrix} -22 & -4 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$

b) Se observa que, efectivamente, $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

18- a) -2 b) 0

19- a) 0 (por tener dos filas iguales) b) 0 (por tener una fila de ceros)

20- $|A|=-6$

21- a) 3 b) 3 c) 0 d) 24

22- Aplicando propiedades de los determinantes:

a) $|A^5|=3^5$ b) $|2A|=2.2.2.3=24$ c) $|A^{-1}|=\frac{1}{3}$ d) $-2.3=-6$

23- Por las propiedades de los determinantes: $|B\cdot C|=3.0=0$

24- a) 2 (regular) b) 1 (singular) c) 3 (regular) d) 2 (singular) e) 2 (singular)

f) 2 (singular) g) 4 (regular) h) 3 (la definición de regular o singular se aplica a matrices cuadradas)

25- a) A es regular $\forall a \neq 0$ b) A es regular $\forall a$

26- a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

c) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 3d-b & 8d-3b \\ -3c+a & -8c+3a \end{pmatrix}$ d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

e) $E^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -1 & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{25}{12} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{4} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

SISTEMAS DE ECUACIONES

27- Ninguno de los sistemas está en forma escalonada.

a) SCD: $x=-5$, $y=\frac{1}{3}$, $z=-\frac{5}{3}$

b) SI

c) SCI: $x=1-z$, $y=2$, $t=-1$ $\forall z$

28- $a= 5$. La solución del sistema es: $x=1$, $y=1$, $z=0$.

29- a) si $\alpha=2 \Rightarrow$ SI

si $\alpha\neq 2 \Rightarrow$ SCD: $x = \frac{2}{5}\cdot\frac{3\alpha-11}{\alpha-6}$, $y = \frac{2}{5}\cdot\frac{\alpha-7}{\alpha-6}$, $z = \frac{2}{\alpha-6}$

b) si $\alpha=2 \Rightarrow$ SCI: $x=5z$, $y=1-4z$ $\forall z$

si $\alpha\neq 2 \Rightarrow$ SCD: $x=0$, $y=1$, $z=0$

c) si $\alpha=2 \Rightarrow$ SCI: $x=\frac{1}{10}(-3+10z)$, $y=\frac{1}{5}(1+5z)$ $\forall z$

si $\alpha\neq 2 \Rightarrow$ SI

d) si $\alpha=2 \Rightarrow$ SCD: $x=1$, $y=0$, $z=1$

si α≠2 ⇒ SI

e) si α=3 ⇒ SCI: $x = 2 - 3z + t, \quad y = 7 - 5z \quad \forall t, z$

si α≠3 ⇒ SI

f) si α=0 ⇒ SCI: $x = \dfrac{21 - 5z}{3}, \quad y = \dfrac{6 + z}{3} \quad \forall z$

si α=1 ⇒ SCD: $x = 12, \quad y = 1, \quad z = -3$

si α≠0 y α≠1 ⇒ SI

30- a) No es posible que no tenga solución ya que al ser un sistema homogéneo siempre existirá al menos la solución trivial (todas las incógnitas con valor igual a cero).

b) para α=2.

31- El sistema tiene solución siempre, por ser homogéneo. Además, ∀*a* *rango*(A)=3<4 (nº incógnitas)⇒ el sistema tendrá infinitas soluciones:

$$x_1 = \frac{-2a+1}{a} \cdot x_4, \quad x_2 = \frac{-4a+1}{a} \cdot x_4, \quad x_3 = \frac{a-1}{a} \cdot x_4 \quad \forall x_4$$