

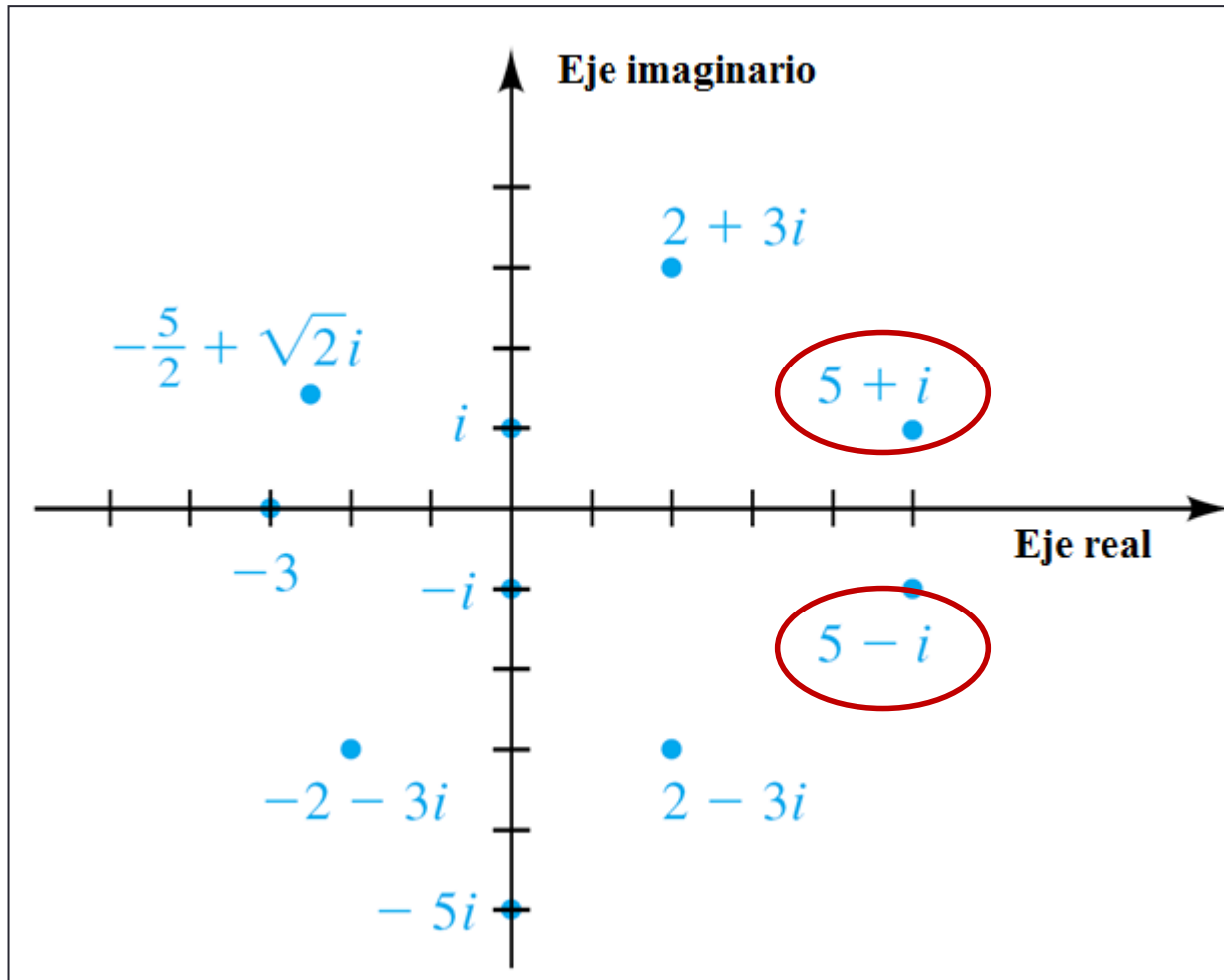
LA FORMA TRIGONOMETRICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS Y EL TEOREMA DE MOIVRE

Capítulo 7 – Sec. 7.5 y 7.6

El Plano Complejo

- Se puede utilizar un plano de coordenadas para representar números complejos.
- Si cada número complejo es asignado a un punto del plano de coordenadas entonces este plano se conoce como un ***plano complejo***.
 - El eje-x es el eje real
 - El eje-y es el eje imaginario.
- De esta forma, cada número complejo $a + bi$ determina un único par ordenado (a, b) .
- Un punto en el plano de coordenadas, $P(a, b)$, corresponde a $a + bi$
-

El Plano Complejo - ejemplos



Noten que para obtener el punto correspondiente al conjugado, $a - bi$, de cualquier número complejo, se refleja a $+ bi$ sobre el eje real:

Valor absoluto de un número complejo

- Una forma natural de definir el valor absoluto de un número complejo es:
 - ***la distancia entre el origen de un plano complejo y el punto (a, b) que corresponde al número complejo $a + bi$***

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces su valor absoluto, denotado

$$|a + bi|,$$

es

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

Valor absoluto de un número complejo

• **Ejemplo: Determinar $|2 + 3i| =$**

$$= \sqrt{2^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{4 + 9}$$

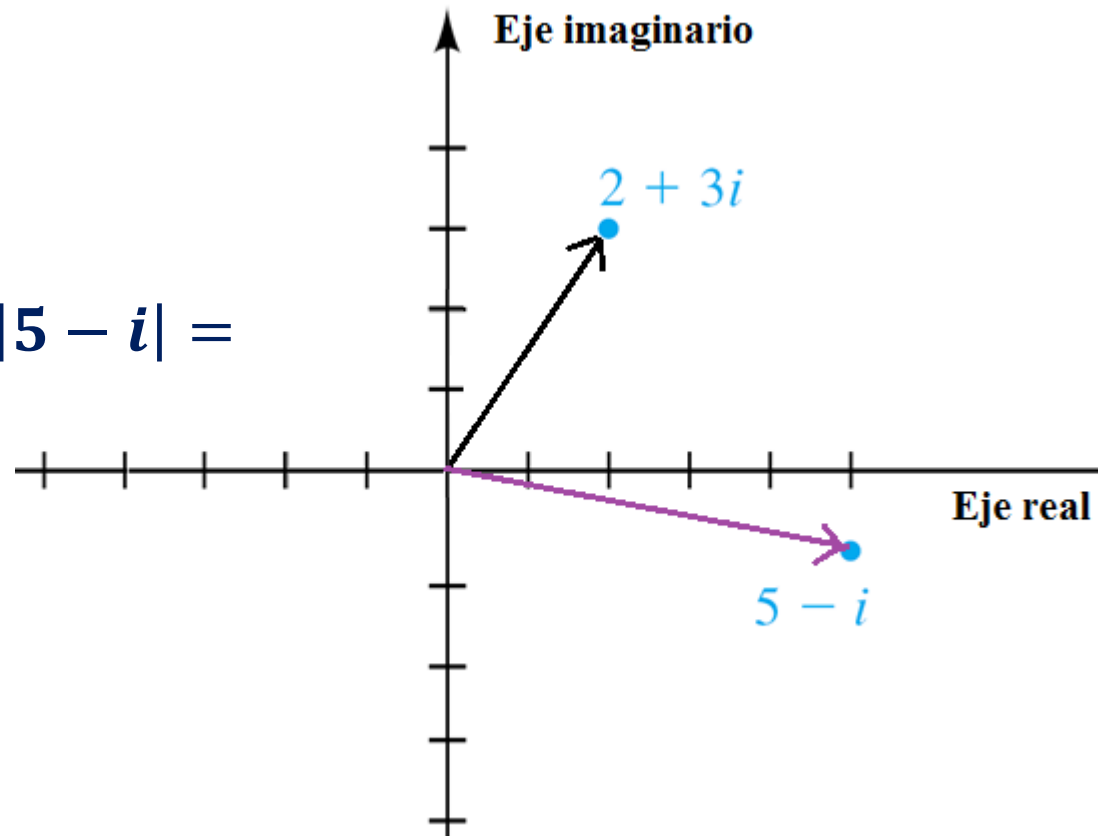
$$= \sqrt{13}$$

• **Ejemplo: Determinar $|5 - i| =$**

$$= \sqrt{(-1)^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{1 + 25}$$

$$= \sqrt{26}$$



Forma trigonométrica

Si consideramos un número complejo distinto de cero,

$$z = a + bi,$$

y su representación geométrica,

$$P(a, b),$$

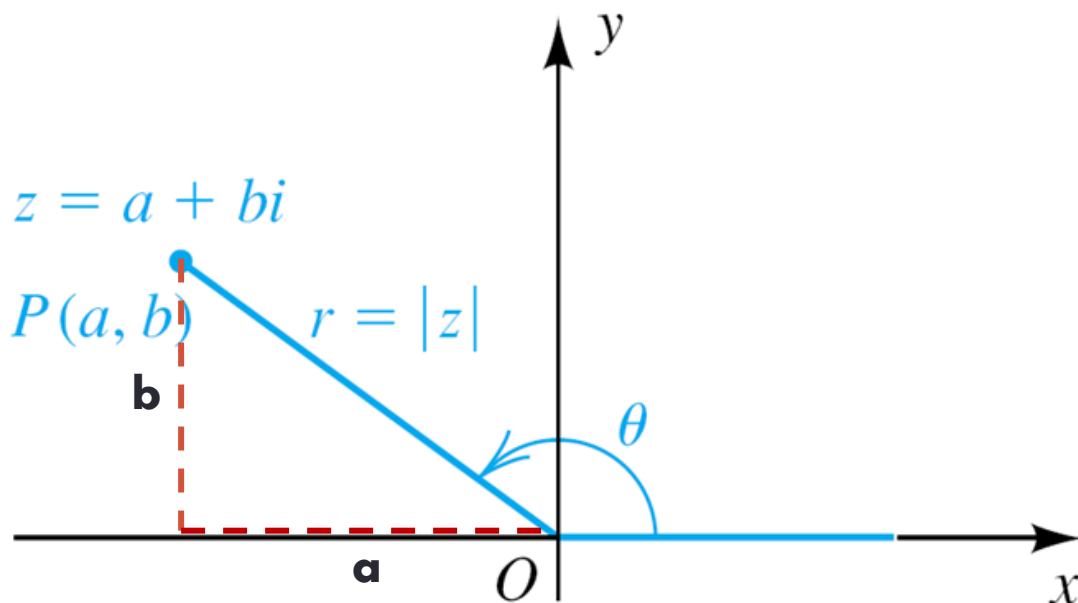
observamos que $a = r \cos \theta$ y $b = r \sin \theta$

Por lo que,

$$z = a + bi$$

$$= (r \cos \theta) + (r \sin \theta)i$$

$$= r(\cos \theta + i \sin \theta).$$



Forma trigonométrica

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta.$$

- Esta expresión se conoce como la **forma trigonométrica** o la **forma polar** del número complejo $a + bi$.
- El valor absoluto de z ,

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

se conoce también como el **módulo de z** .

- El ángulo θ , asociado a z , se conoce como el **argumento de z**

Ejemplo: Expresar $-4 + 4i$ en su forma trigonométrica con $0 \leq \theta < 2\pi$:

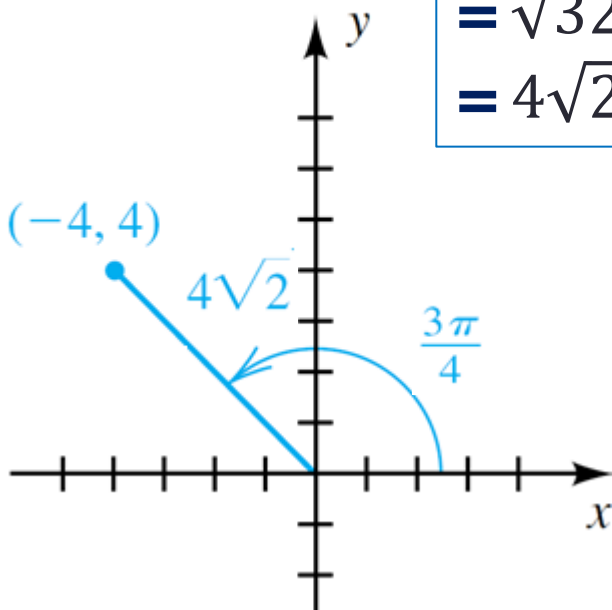
Primero calculamos el módulo del número

$$\begin{aligned} |-4 + 4i| &= \\ &= \sqrt{(-4)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{32} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Luego, calculamos el argumento del número

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{-4}{4\sqrt{2}} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

(a)



La forma trigonométrica de

$$\begin{aligned} -4 + 4i &= 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\ &= 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

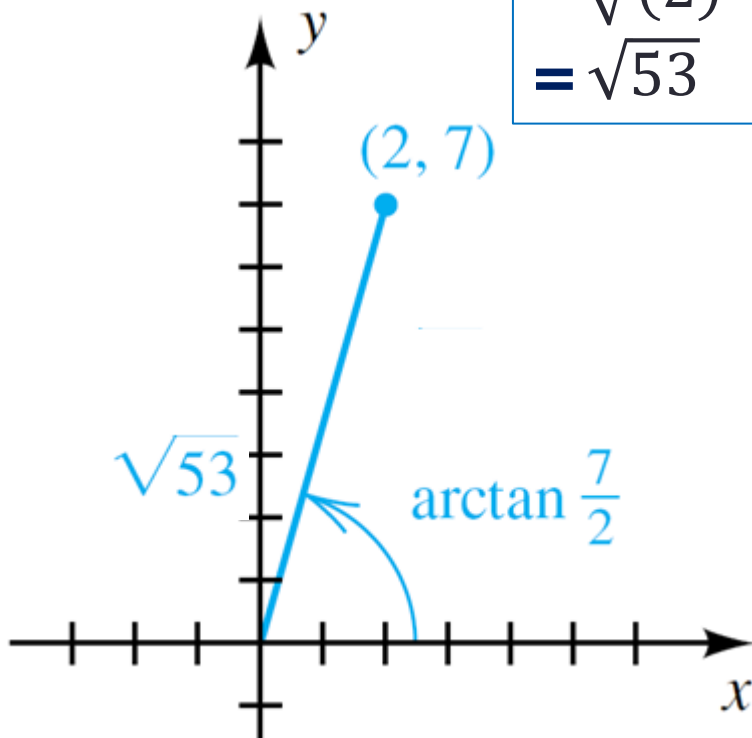
Ejemplo: Expresar $2 + 7i$ en su forma trigonométrica con $0 \leq \theta < 2\pi$:

Primero calculamos el módulo del número

$$\begin{aligned} |2 + 7i| &= \\ &= \sqrt{(2)^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{53} \end{aligned}$$

Luego, calculamos el argumento del número. Como θ no es un ángulo conocido, lo dejamos expresado

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{7}{2} \right)$$



La forma trigonométrica de

$$2 + 7i =$$

$$\sqrt{53} \left(\cos \left(\tan^{-1} \left(\frac{7}{2} \right) \right) + i \sin \left(\tan^{-1} \left(\frac{7}{2} \right) \right) \right)$$

$$= \sqrt{53} \operatorname{cis} \left(\tan^{-1} \left(\frac{7}{2} \right) \right)$$

Multiplicación de números complejos

Sean z_1 y z_2 , dos números complejos tal que

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{y}$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

entonces el *producto* de z_1 con z_2 tiene

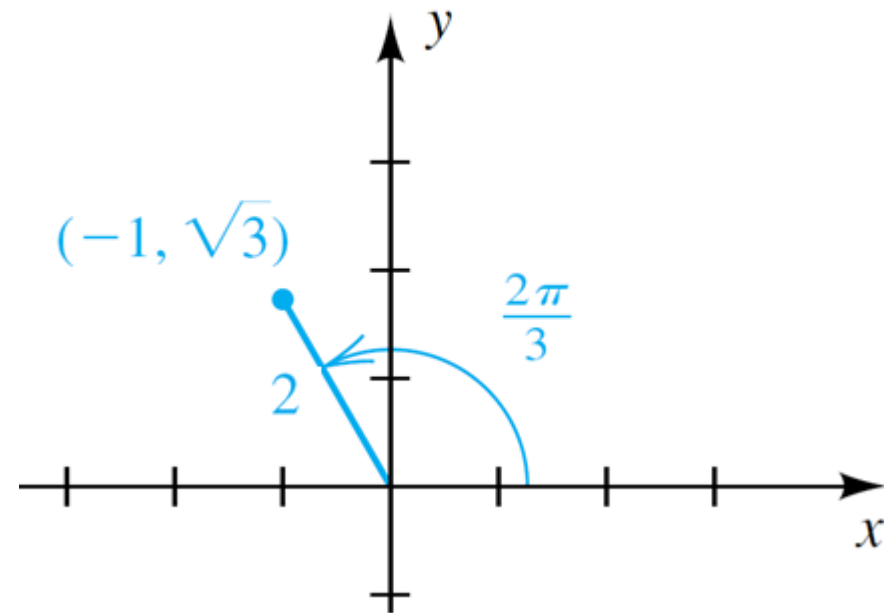
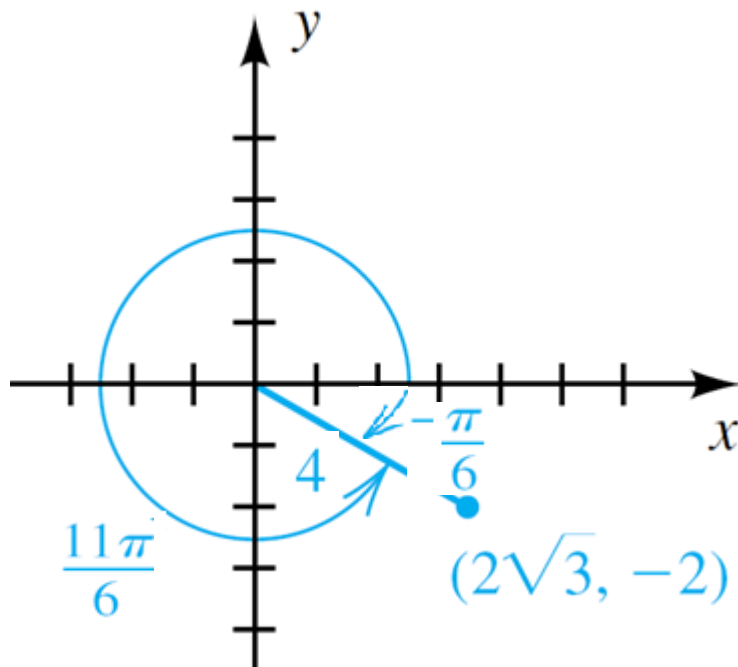
- un módulo igual al **producto** del módulo de cada número
- un argumento igual a la **suma** de los argumentos.

$$(1) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$$

Multiplicación de números complejos

Ejemplo: Si $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ y $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, use formas trigonométricas para determinar $z_1 z_2$.

Solución: La representación geométrica de los números se muestra en la figura. Revise el cálculo del módulo, r , y del argumento, θ , en cada caso.



Solución (cont)

- Usando $r_1 = 4$ y $\theta_1 = -\pi/6$, entonces z_1 , en la forma trigonométrica es:

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i = 4 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right].$$

- Usando $r_2 = 2$ y $\theta_2 = 2\pi/3$, entonces z_2 , en la forma trigonométrica es:

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Solución (cont.)

$$(1) z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = 4 \cdot 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= 8(0 + i) = 8i$$

División de números complejos

Sean z_1 y z_2 , dos números complejos tal que

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{y}$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

entonces el *cociente* de z_1 con z_2 tiene

- un módulo igual al *cociente* del módulo de cada número
- un argumento igual a la *diferencia* de los argumentos.

$$(2) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0$$

División de números complejos

Ejemplo: Si $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ y $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, use formas trigonométricas para determinar $\frac{z_1}{z_2}$.

Solución: Habíamos determinado la forma trigonométrica de los números en el ejemplo anterior.

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i = 4 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right].$$

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Solución (cont.)

- Aplicando la parte (2) del teorema para división de números complejos en forma trigonométrica tenemos:

$$(2) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)], z_2 \neq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &= 2 \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right] \end{aligned}$$

Note que se puede obtener la notación $a + bi$

$$= 2 \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) \right] = -\sqrt{3} - i$$

El Teorema de De Moivre

El *teorema de De Moivre* describe una fórmula para determinar **potencias** de un número complejo.

Un número complejo, en la forma trigonométrica elevado a un entero positivo, n , se puede expresar

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Ejemplo

Use el teorema de De Moivre para determinar y expresar en la forma $a + bi$

$$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^3$$

Solución

Según el teorema de De Moivre,

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

En el caso que tenemos, $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $n=3$.

Aplicando el teorema,

$$\begin{aligned}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^3 &= 1^3 \left(\cos 3\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = (0 + i) = i\end{aligned}$$

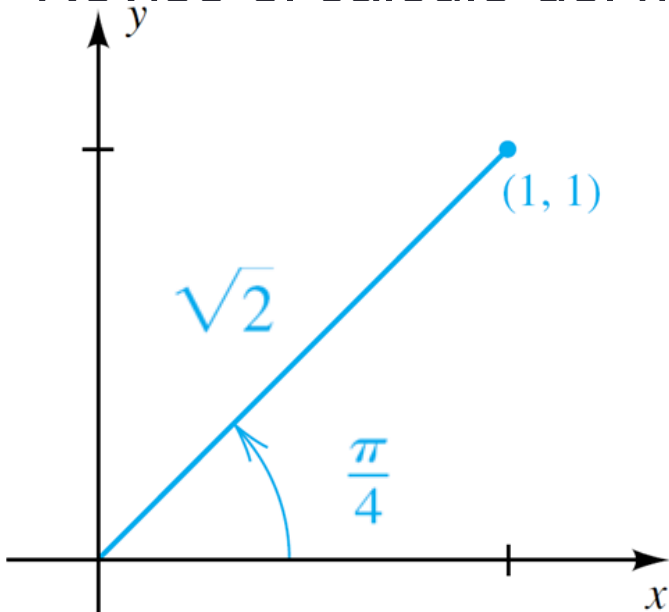
Ejemplo

Use el teorema de De Moivre's para cambiar $(1 + i)^6$ a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales

Solución

Primero debemos determinar la forma trigonométrica para $1 + i$.

Revise el cálculo del módulo, r , y del argumento, θ .



$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Solución (cont.)

Ahora aplicando el teorema de De Moivre:

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

$$\begin{aligned}(1 + i)^6 &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^6 \\ &= \left[\sqrt{2}^6 \left(\cos 6 \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin 6 \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] \\ &= \left[\left(2^{\frac{1}{2}} \right)^6 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right) \right] \\ &= \left[2^3 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right) \right] \\ &= 8 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -8i\end{aligned}$$

Teorema de raíces enésimas

- Podemos utilizar el teorema de De Moivre para desarrollar una fórmula para determinar **raíces positivas** de un número complejo :
- Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ es un número complejo diferente de cero y si n es un entero positivo, entonces z tiene exactamente n raíces diferentes que se pueden expresar en **radianes**

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right]$$

o en **grados**

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) \right],$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

Ejemplo

Aproxime, a dos lugares decimales, las dos raíces cuadradas de $-5 + 12i$

- **Solución** Determinemos la forma trigonométrica del número

$$r = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{12}{5}\right) \approx -67.38^\circ$$

El número complejo $-5 + 12i$ está en el segundo

cuadrante, de modo que $\theta = 180^\circ - 67.38 = 112.62^\circ$

Entonces, $-5 + 12i = 13(\cos 112.62 + i \sin 112.62)$

Solución cont.

Entonces, $-5 + 12i = 13(\cos 112.62 + i \sin 112.62)$ y

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right]$$

$$(-5+12j)^{1/2} = 13^{\frac{1}{2}} \left(\cos \left(\frac{112.62+360^\circ k}{2} \right) + i \sin \left(\frac{112.62+360^\circ k}{2} \right) \right) \quad \text{para}$$

$$\mathbf{k = 0:} \quad \sqrt{13} \left(\cos \left(\frac{112.62}{2} \right) + i \sin \left(\frac{112.62}{2} \right) \right) = \sqrt{13}(\cos 56.31^\circ + i \sin 56.31^\circ) \\ \approx \mathbf{2 + 3i}$$

$$\mathbf{k = 1:} \quad \sqrt{13} \left(\cos \left(\frac{472.62}{2} \right) + i \sin \left(\frac{472.62}{2} \right) \right) = \sqrt{13}(\cos 232.61^\circ + i \sin 232.6^\circ) \\ \approx \mathbf{-2 - 3i}$$

Ejemplo

- Determinar de forma exacta $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}$

- **Solución**

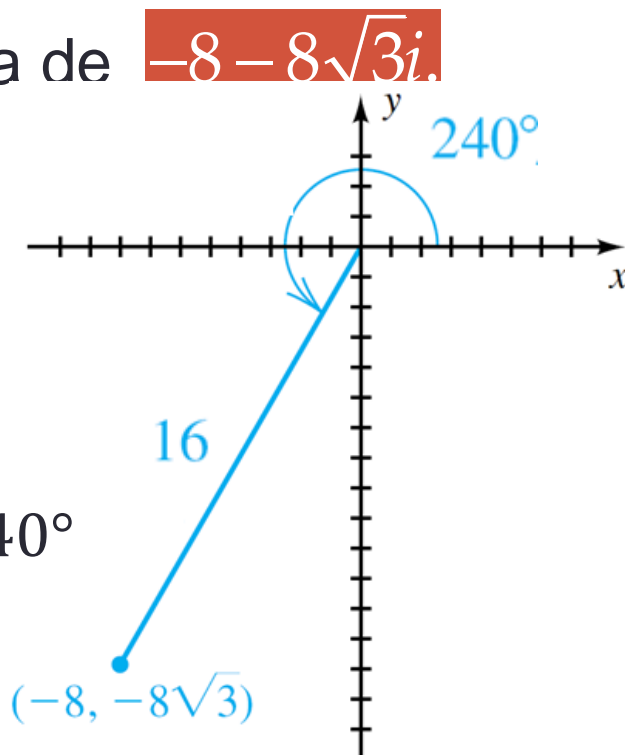
- Determinamos la forma trigonométrica de $-8 - 8\sqrt{3}i$.

$$r = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{256} = 16$$

$$\theta_R = \tan^{-1} \frac{-8\sqrt{3}}{-8} = \tan^{-1} \sqrt{3} = 60^\circ$$

Como θ está en tercer cuadrante, $\theta = 240^\circ$

$$-8 - 8\sqrt{3}i = 16(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ).$$



Solución (cont)

- Usando el teorema sobre *raíces enésimas*,

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) \right],$$

con $n = 4$, y $\sqrt[4]{16} = 2$, la fórmula general que nos da las raíces es

$$w_k = 2 \left[\cos \left(\frac{240^\circ + 360^\circ k}{4} \right) + i \sin \left(\frac{240^\circ + 360^\circ k}{4} \right) \right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3$.

Solución (cont.)

La ecuación anterior se puede simplificar:

$$w_k = 2 \left[\cos \left(\frac{240^\circ}{4} + \frac{360^\circ k}{4} \right) + i \sin \left(\frac{240^\circ}{4} + \frac{360^\circ k}{4} \right) \right]$$

$$w_k = 2[\cos (60^\circ + 90^\circ k) + i \sin (60^\circ + 90^\circ k)].$$

Sustituyendo 0, 1, 2, and 3 para k nos da :

$$w_0 = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 1 + \sqrt{3}i$$

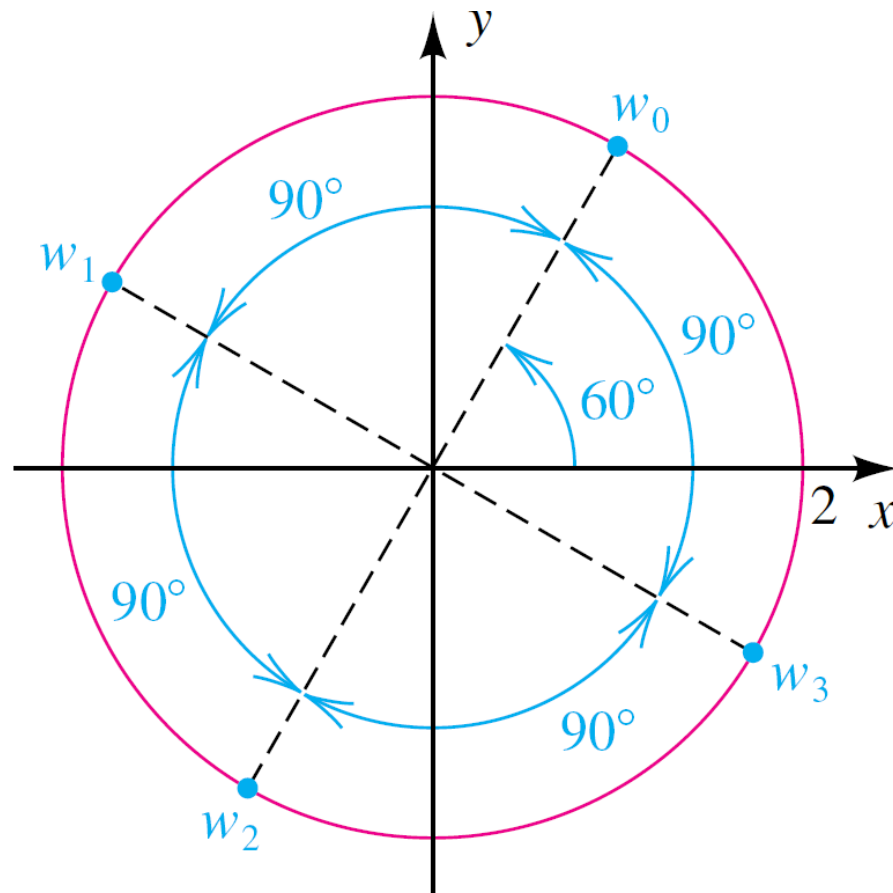
$$w_1 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + i$$

$$w_2 = 2(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$w_3 = 2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = \sqrt{3} - i$$

Solución (cont.)

- Todas las raíces se encuentran en un círculo de radio $\sqrt[4]{16} = 2$, como se muestra:



Ejemplo

- Determinar las ***soluciones*** exactas de $x^3 + 8i = 0$
- **Solución** Despejando la ecuación para x tenemos

$$x = \sqrt[3]{-8i}$$

Debemos hallar las raíces cúbicas de $-8i$.

Escribir $-8i$ en forma trigonométrica.

$$r = \sqrt{(0)^2 + (-8)^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\theta_R = \tan^{-1} \frac{-8}{0} \quad \tan^{-1} \quad \text{no está definida en } \frac{\pi}{2} \text{ y } \frac{3\pi}{2}.$$

Como la parte imaginaria del número es negativa, $\theta = 270^\circ$

$$-8i = 8 \left(\cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

Solución (cont)

- Usando el teorema sobre *raíces enésimas*,

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) \right],$$

con $n = 3$, y $\sqrt[3]{r} = 2$ la fórmula general que nos da las raíces es

$$w_k = 2 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi \right) - i \sin \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi \right) \right)$$
$$w_k = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} k \right) \right)$$

para $k = 0, 1, 2$

Solución (cont)

- Usando

$$w_k = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} k \right) \right)$$

- Sustituyendo 0, 1, 2, and 3 para k nos da :

- $w_0 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} (0) \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} (0) \right) \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2i$

- $w_1 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} (1) \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} (1) \right) \right)$

- $w_1 = 2 \left(\cos \left(\frac{7\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i$

- $w_2 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} (2) \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} (2) \right) \right)$

- $w_2 = 2 \left(\cos \left(\frac{11\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} - i$